INSTITUT SUPERIEUR DU COMMERCE
ETABLISSEMENT PRIVE D'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR RECONNU PAR L'ETAT
DIPLOME VISE PAR LE MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE
22, BOULEVARD DU FORT DE VAUX 75017 PARIS - TEL : (1) 42.70.34.80/90.95

Session de 1987 Durée : 4 heures
Concours d'admission Option Générale
MATHÉMATIQUES Coefficient : 4

EXERCICE 1 *(5 points)*

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites définies par leurs premiers termes respectifs u_0, v_0, w_0 réels et les relations de récurrence :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad \begin{cases} 3u_{n+1} = 4u_n + 2v_n + w_n \\ 3v_{n+1} = -u_n + v_n - w_n \\ 3w_{n+1} = -2u_n - 2v_n + w_n \end{cases}$$

1°) On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme associé dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

a) λ étant un paramètre réel, déterminer par la méthode du pivot de Gauss le noyau de $f-\lambda.\mathrm{Id}$, où Id désigne l'identité sur $\mathbb{R}^3$. Vérifier qu'il existe trois valeurs de λ pour lesquelles ce noyau n'est pas réduit au vecteur nul. On notera ces valeurs $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ avec $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$.

b) Soit P la matrice carrée d'ordre 3 définie par :

i) la première ligne de P est constituée de 1

ii) pour $j\in\{1,2,3\}$, le jème vecteur colonne de P est constitué d'un vecteur du noyau de $f-\lambda_j.\mathrm{Id}$.

Montrer que P est une matrice inversible et calculer P^{-1}.

c) Calculer $P^{-1}.A.P$ et en déduire la valeur de A^n pour $n\in\mathbb{N}$.

2°) Calculer u_n, v_n, w_n en fonction de n et des valeurs initiales u_0, v_0, w_0. Ces trois suites sont-elles convergentes ?

EXERCICE 2 *(5 points)*

Soit n un nombre entier naturel strictement positif.

1°) Une urne contient 2n boules dont n boules blanches. On tire en une seule fois une poignée de p boules de cette urne (avec $0\leqslant p\leqslant 2n$) et on note X_p l'aléa numérique égal au nombre de boules blanches obtenues.

a) On suppose dans cette question que l'on a : n = 5, p = 7. Déterminer la loi de X_7, son espérance et sa variance.

b) On suppose dans cette question que l'on a : p = n. Déterminer la loi de X_n et son espérance.

c) Des calculs précédents, déduire la valeur de $\sum_{k=0}^{n} (C_n^k)^2$.

(C_n^k désignant le nombre de parties à k éléments d'un ensemble à n éléments).

2°) On dispose d'une urne U_1 contenant au départ N boules blanches et N boules noires (N est supposé très grand) et d'un stock accessoire de boules noires et blanches. On dispose également d'une seconde urne U_2 contenant quatre cartons sur lesquels sont écrites les phrases suivantes :

"n°1 : ajouter une boule blanche dans U_1"
"n°2 : enlever une boule blanche de U_1"
"n°3 : ajouter une boule noire dans U_1"
"n°4 : enlever une boule noire de U_1".

L'expérience consiste à choisir au hasard n fois un carton dans U_2 (avec remise et avec $n\leqslant N$) et à effectuer à chaque fois l'instruction obtenue.

a) Pour $1\leqslant i\leqslant n$, on note Y_i la variable aléatoire valant 1 si le carton obtenu au ième tirage dans U_2 porte le numéro 1, -1 s'il porte le numéro 2 et 0 sinon. Quelle est la loi de Y_i ?

b) Calculer l'espérance et la variance du nombre aléatoire de boules blanches contenues dans l'urne U_1 à la fin de l'expérience.

c) On note I_n l'événement : "à la fin de l'expérience, le contenu de l'urne U_1 est identique au contenu initial". Calculer la probabilité de l'événement I_n.

PROBLEME *(10 points)*

I – 1°) Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = -x + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|,$$ où ln désigne la fonction "logarithme népérien".

a) Quel est le domaine de définition de f ?

b) Montrer que f est dérivable sur son domaine de définition et déterminer la fonction f'.

c) Construire avec précision la représentation graphique (C) de f en repère orthonormé (l'unité sera prise égale à 4 cm). On indiquera en particulier la concavité et la nature des branches infinies.

TOURNEZ S'IL VOUS PLAIT

2°) Soit I(a) l'aire de la surface limitée par l'axe des abscisses, la courbe (C) et les verticales d'abscisses respectives 0 et a, avec $0 < a < 1$.

a) Calculer I(a).

b) Cette aire a-t-elle une limite lorsque a tend vers 1 par valeurs inférieures ?

3°) Soit g la fonction définie sur $]-1, 1[$ par $g(x) = \frac{x^3}{3(1-x^2)}$. Construire avec précision la représentation graphique (Γ) de g, dans le même repère que précédemment.

4°) Pour $n \in \mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$, on pose : $u_n = \frac{n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}}{n!}$; $v_n = u_n e^{\frac{1}{12n}}$.

a) Déduire, de ce qui précède, la monotonie des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

b) Montrer que les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont convergentes de même limite. En notant ℓ cette limite, montrer que l'on a :

$$0{,}39 < \ell < 0{,}4.$$

c) En déduire un équivalent de n! lorsque n tend vers l'infini.

II Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose : $J_n = \int_0^1 \frac{t^n}{\sqrt{1-t^2}}\, dt$.

1°) Justifier l'existence du nombre J_n et montrer que la suite $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

2°) Montrer que : $\forall n \geq 2$, $J_n = \frac{n-1}{n} J_{n-2}$.

3°) Calculer J_1 et en déduire que l'on a :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad J_{2p+1} = \frac{(2^p . p!)^2}{(2p+1)!}.$$

4°) Montrer que l'expression $(2p+1) J_{2p+1} J_{2p}$ est indépendante de la valeur de l'entier p.

5°) Déterminer $\lim_{p \to +\infty} \frac{J_{2p+1}}{J_{2p}}$ et en déduire un équivalent simple de J_{2p+1} lorsque p tend vers l'infini.

6°) Déterminer la valeur de ℓ (défini en I-4°)) et en déduire la nature de la série dont le terme général est la probabilité de l'événement I_n (défini dans l'exercice 2)).

INSTITUT SUPERIEUR DU COMMERCE

ETABLISSEMENT PRIVE D'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR RECONNU PAR L'ETAT
DIPLOME VISE PAR LE MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE
22, BOULEVARD DU FORT DE VAUX 75017 PARIS - TEL : (1) 42.70.34.80/90.95

Session de 1987
Concours d'admission
MATHÉMATIQUES

Option Economique
Option Technologique
Durée 4 heures - Coefficient : 3

EXERCICE 1 *(5 points)*

On a relevé à la fin de chaque mois de l'année 1986 le cours du dollar dans trois grandes places financières :

Mois	J	F	M	A	M	J	J	A	S	O	N	D
Dollar Paris	7,60	7,30	6,90	7,50	7,00	7,40	6,95	6,80	6,50	6,75	6,40	6,60
Dollar Tokyo	202	193	176	179	162	172	150	153	152	163	161	164
Dollar Frankfort	2,50	2,40	2,22	2,38	2,18	2,31	2,15	2,08	1,96	2,07	1,95	2,02

(les cours à Paris sont bien entendu exprimés en Francs, à Tokyo en Yens et à Frankfort en Marks, à chaque fois pour un Dollar).

1°) On désire connaître rapidement un ordre de grandeur de la corrélation entre le cours du Dollar à Paris et son cours dans chacune des deux autres villes. Pour cela :

Pour chacune des trois places financières, on associe à chaque mois son rang par ordre des cours décroissants de cette place.

Quel est le coefficient de corrélation des rangs entre Paris et chacune des deux autres villes ?

(On presentera les seuls calculs nécessaires en un unique tableau).

2°) Déterminer les équations des droites de régression entre le cours du Dollar à Paris et à Frankfort.

3°) Certains experts penchent pour une baisse supplémentaire de 10% du Dollar par rapport au Mark pour l'année 1987, en prenant comme référence le cours de décembre 1986. Quelle estimation pouvez-vous donner pour le cours du Dollar par rapport au Franc, pour cette même année 1987 ?

Tournez la page S. V. P.

INSTITUT SUPERIEUR du COMMERCE
Opt. générale, éco. et techno.

EXERCICE 2 *(5 points)*

On considère une urne blanche contenant deux boules vertes et une boule rouge, une urne rouge contenant une boule blanche et deux boules vertes et une urne verte contenant une boule blanche et une boule rouge.

1°) On choisit une urne au hasard et on y prend une boule au hasard. On note b_1 (respectivement r_1, v_1) la probabilité d'obtenir une boule blanche (respectivement rouge, verte).

Calculer b_1, r_1, v_1.

2°) On replace dans l'urne choisie la boule obtenue et, à partir de maintenant, on effectue des tirages successifs d'une boule d'une urne (avec remise dans l'urne choisie) en choisissant à chaque fois une boule au hasard dans l'urne ayant la couleur de la boule obtenue la fois précédente. On note b_n (resp. r_n, v_n) la probabilité d'obtenir une boule blanche (resp. rouge, verte) au nième tirage, pour $n \geqslant 1$.

a) Déterminer des relations de récurrence liant b_n, r_n, v_n à b_{n-1}, r_{n-1}, v_{n-1}.

b) En déduire v_n en fonction de v_{n-1}, puis v_n en fonction de n.

c) Déterminer alors r_n en fonction de n.

d) Les suites $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, $(r_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont-elles convergentes ?

Dans l'affirmative, déterminer leurs limites.

3°) On décide d'effectuer des tirages selon le protocole précédent, jusqu'à ce que l'on obtienne pour la première fois une boule rouge. On note X le nombre aléatoire de tirages ainsi effectués. Déterminer la loi de X.

EXERCICE 3 *(5 points)*

Soit m un paramètre réel et f_m la fonction définie par :

$$f_m(x) = \ln(2 + m x^2)$$

(où ln désigne la fonction "logarithme népérien").

1°) On suppose $m < 0$. Déterminer le domaine de définition de f_m et étudier ses variations. Construire, en repère orthonormé, la représentation graphique de f_{-1}.

2°) On suppose $m > 0$. Etudier les variations de f_m, préciser la nature des branches infinies et la concavité. Construire, dans le même repère que précédemment, la représentation graphique de f_2.

3°) On considère l'équation $2 + m x^2 = e^{-mx}$ où x est l'inconnue. Dire combien de solutions elle possède, selon les valeurs du paramètre m. Donner les meilleures valeurs approchées à 10^{-2} près des éventuelles solutions dans les cas $m = -1$, $m = 2$, $m = 1$.

EXERCICE 4 *(5 points)*

1°) On considère les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définies par :

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln(x) \; ; \quad v_n = u_n - \frac{1}{n}.$$

a) Montrer que ces suites sont monotones et qu'elles convergent vers une même limite notée ℓ.

b) Montrer que l'on a : $0{,}5 < \ell < 1$.

c) Déterminer $\lim_{n \to \infty} (u_{2n} - u_n)$ et en déduire :

$$\lim_{n \to \infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} \right).$$

2°) Déterminer $\lim_{n \to \infty} (e^{\frac{1}{n+1}} + e^{\frac{1}{n+2}} + \cdots + e^{\frac{1}{n+n}} - n)$.

* * *